EXERCICE N°4 :	40'	7 points	

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$: $f'(x)=-\dfrac{4\ln x}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Déterminer les coordonnés du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

2°) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=1-x+2\ln x$.

a) Etudier les variations de h sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet deux solutions dans $]0,+\infty[$, 1 et α, tel que : $3{,}51<\alpha<3{,}52$.

3°) Dans la figure ci-dessous, on a tracé dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}$ et on a placé le réel α.

a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$: on a, $f(x)-g(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$.

b) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

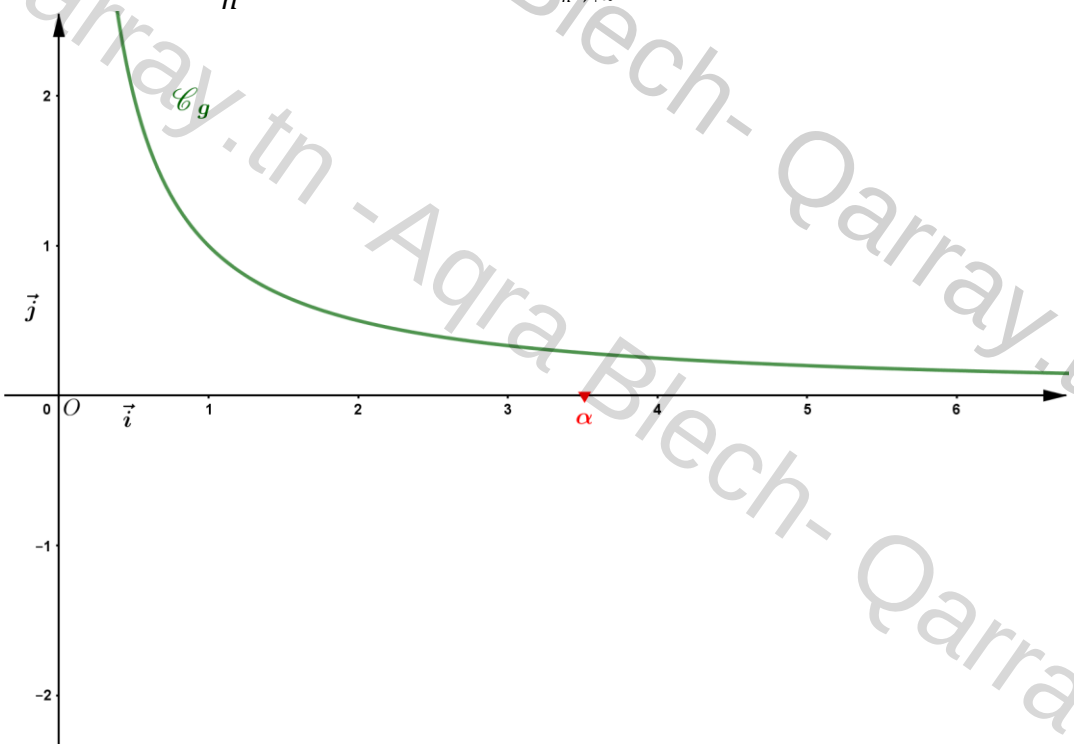
c) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine limité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.

À l'aide d'une intégration par partie Montrer que : $\mathcal{A}(\alpha)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{\alpha}-\dfrac{\alpha}{2}$.

6°) Pour tout entier $n\geq 1$ on considère les suites : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$ et $S_n=I_1+I_2+I_3+\cdots+I_{n-1}$.

Montrer que : $S_n=\dfrac{3(n-1)-2\ln n}{n}$, En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=3$.



Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn